

BTS Groupement A

Exercice 1 BTS, Groupement A1, 2010

3 points

$$y''(t) + 4y(t) = 20 \quad (1).$$

1. Soit $h(t) = k$, $k \in \mathbb{R}$ une fonction constante, alors h est solution de (1) si $h''(t) + 4h(t) = 20 \iff 4k = 20 \iff k = 5$.

Donc la fonction constante $h(t) = 5$ est une solution particulière de (1).

2. L'équation caractéristique est : $r^2 + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 = -4^2 > 0$, et qui admet donc deux racines complexes conjuguées : $r_1 = 2j$ et $r_2 = -2j$.

La solution générale s'écrit donc, $g(t) = A \cos(2t) + B e \sin(2t)$. où A et B sont des nombres réels quelconques.

3. La solution de (1) s'écrit donc $f(t) = g(t) + h(t) = A \cos(2t) + B e \sin(2t) + 5$.

De plus, $f(0) = A + 5 = 0$ et $f'(0) = 2B = 0$, d'où $B = 0$, et donc $A = -5$.

Ainsi $f(t) = -5 \cos(2t) + 5 = 5(1 - \cos(4t))$.

Exercice 1 BTS, Groupement A1, 2007

8 points

1. (a)
$$|T(\omega)| = \left| \frac{i\omega k}{1 - i\frac{\omega}{2}} \right| = \frac{|i\omega k|}{\left| 1 - i\frac{\omega}{2} \right|} = \frac{\omega k}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}} = \frac{\omega k}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}}}$$

(b)
$$r(\omega) = |H(\omega)| = |(T(\omega))^3| = |T(\omega)|^3 = \frac{(\omega k)^3}{\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right)^{3/2}}$$

2. (a) $\arg((i\omega k)^3) = 3 \arg(i\omega k)$, or $\omega > 0$ et $k > 0$, et donc, $\arg((i\omega k)^3) = 3 \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Un argument θ de $1 - i\frac{\omega}{2}$ est tel que $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{4}}}$ et $\sin \theta = \frac{-\frac{\omega}{2}}{\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{4}}}$.

Ainsi, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\omega}{2}}{1} = -\frac{\omega}{2}$, d'où $\theta = \arctan\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

On a alors,

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg((H(\omega))^3) = 3 \arg(H(\omega)) = 3 \arg\left(\frac{i\omega k}{1 - i\frac{\omega}{2}}\right) \\ &= 3 \left(\arg(i\omega k) - \arg\left(1 - i\frac{\omega}{2}\right) \right) = 3 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} - 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 3 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

(b)
$$\varphi'(\omega) = 0 + 3 \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

On a donc, pour tout $\omega > 0$, $\varphi'(\omega) > 0$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x) = 0$, et donc, $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} + 3 \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, et donc, $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} + 3 \frac{\pi}{2} = 3\pi$.

3.

ω	0	$+\infty$
$r'(\omega)$	+	
$r(\omega)$	0	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	$\frac{3\pi}{2}$	3π
$\varphi'(\omega)$	+	

4. Dans cette dernière question, on se place dans le cas où $k = 0,9$.

(a) Voir annexe 1.

(b) ω_0 est tel que $r(\omega_0) = |H(\omega_0)| = 1$, soit,

$$\begin{aligned}
 r(\omega_0) = \frac{(\omega_0 k)^3}{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{4}\right)^{3/2}} = 1 &\iff (\omega_0 k)^3 = \left(1 + \frac{\omega_0^2}{4}\right)^{3/2} \iff \omega_0 k = \left(1 + \frac{\omega_0^2}{4}\right)^{1/2} \\
 &\iff (\omega_0 k)^2 = 1 + \frac{\omega_0^2}{4} \iff \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \omega_0^2 = 1 \\
 &\iff \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}} \simeq 1,34 \text{ car } \omega_0 > 0
 \end{aligned}$$

et,

$$\varphi(\omega_0) = \frac{3\pi}{2} + 3 \arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \simeq 6,48 [2\pi] \simeq 6,48 - 2\pi [2\pi] \simeq 0,20 [2\pi]$$

Exercice 2 BTS, Groupement A1, 2010

9 points

1. $h(t) = f(t) - g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si, } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si, } \tau \leq t \leq 2\pi \end{cases}$, voir la représentation graphique sur le document réponse 2.

$$2. \text{ (a) } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\tau 1 dt + \int_\tau^{2\pi} 0 dt \right) = \frac{1}{2\pi} [t]_0^\tau = \frac{\tau}{2\pi}$$

(b)

$$\int_0^\tau \cos(nt) dt = \left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^\tau = \frac{1}{n} \sin(n\tau)$$

Comme

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \cos(n\omega t) dt$$

avec, $T = 2\pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$, soit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin(n\tau) = \frac{1}{n\pi} \sin(n\tau).$$

(c) Pour tout entier n ,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T h(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_0^\tau = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\tau)).$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \sin^2(n\tau) + \frac{1}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\tau))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2n^2\pi^2} (\sin^2(n\tau) + 1 + \cos^2(n\tau) - 2\cos(n\tau)) \end{aligned}$$

or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, et donc,

$$A_n^2 = \frac{1}{2n^2\pi^2} (2 - 2\cos(n\tau)) = \frac{1}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\tau))$$

et donc,

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \sqrt{1 - \cos(n\tau)}.$$

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \frac{\pi}{4}$.

4. Voir document réponse n° 3.

5. (a) La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau 1 dt = \frac{\tau}{2\pi} = \frac{1}{8}$$

(b) Pour tout $\tau \in [0; 2\pi]$, $-1 \leq \cos(n\tau) \leq 1$, et on a donc, $-1 \leq -\cos(n\tau) \leq 1$, d'où, $0 \leq 1 - \cos(n\tau) \leq 2$.

La série $P = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n^2$, est une série de terme général positif $A_n^2 = \frac{1}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\tau))$.

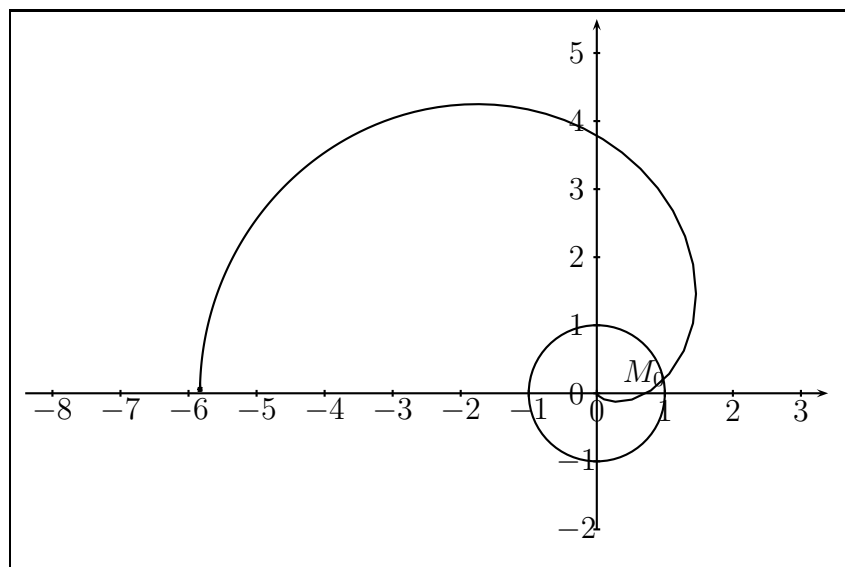
On a donc, d'après l'encadrement précédent $A_n^2 \leq \frac{2}{n^2\pi^2}$. Or, la série de terme général $u_n = \frac{2}{n^2\pi^2}$ est une série convergente (série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 1$).

Ainsi, par comparaison de série à termes positifs, la série de terme général A_n^2 est aussi convergente.

(c) $P_3 = \sum_{n=0}^3 A_n^2 = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \simeq 0,0764$.

(d) $\frac{P_3}{h_{\text{eff}}^2} \simeq 0,61$.

Annexe 1



Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de f

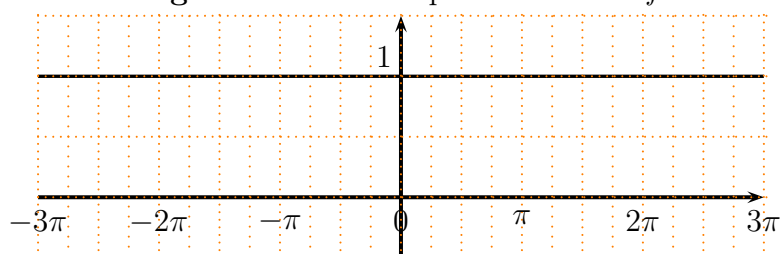


Figure 2 : courbe représentative de g

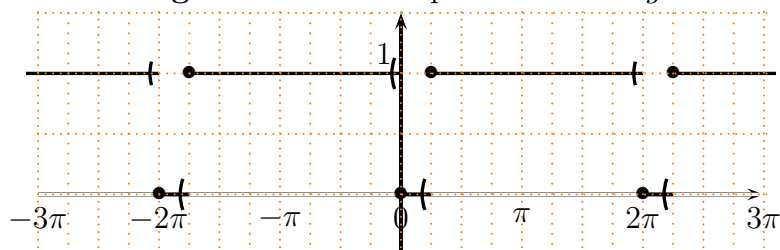
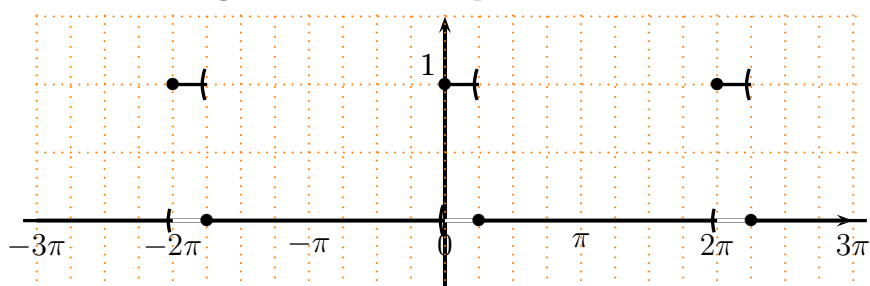


Figure 3 : courbe représentative de h



Document réponse n° 3, à rendre avec la copie (exercice 1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,125 00	0,172 27	0,159 15	0,138 63	0,112 54	0,083 18	0,053 05	0,024 61
n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	0	0,019 14	0,031 83	0,037 81	0,037 51	0,031 99	0,022 74	0,011 48